第１２回　医学部受験チャレンジ問題解答

問１　5％の汚染物質を含んでいる汚染水が200 l の容器一杯に入っている．汚染水を絶えず攪拌しながら，毎分4 l の割合で真水を注入し，同量の汚染水が容器外にあふれ出ているとする．51分後には何％の汚染水になっているか．

$\boxed{\text{解答}}$　t 分後の汚染物質の量を $y(t)$ とおく。$t=0$ のときは，$y(0)=200\times\dfrac{5}{100}=10$ である。

t 分後の $y(t)$ の減少する速度は，$\dfrac{dy(t)}{dt}=-y(t)\times\dfrac{4}{204}$　$y(t)=y$ とおくと，$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{y}{51}$ が成立する。

$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=-\frac{1}{51}\int dt$ より，$\log y=-\dfrac{t}{51}+C$（C は定数）

ゆえに，$y=e^{-\frac{t}{51}+C}$　$t=0$ のとき，$y=10$ なので $e^C=10$　$y(t)=10e^{-\frac{t}{51}}$ となる。

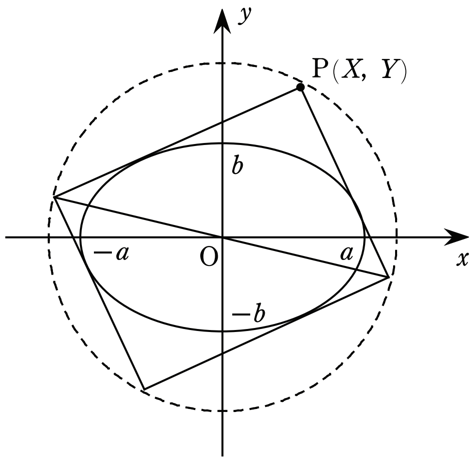
$t=51$ のとき，$y(51)=10e^{-1}=\dfrac{10}{e}$

したがって汚染水の％は，$\dfrac{\frac{10}{e}}{200}\times100=\dfrac{5}{e}$ ％

51分後には，$\dfrac{5}{e}$ ％(＝約1.8％) になっている。

問２　だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ に外接する長方形の対角線の長さは一定であることを示せ．

$\boxed{\text{解答}}$　だ円の外部の点 P$(X,\ Y)$ から，だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に引いた2本の接線が直交しているとする。P$(X,\ Y)$ を通り，傾き m の直線は $y-Y=m(x-X)$ より，$y=mx+Y-mX$



代入して，$b^2x^2+a^2(mx+Y-mX)^2=a^2b^2$

x について整理すると，

$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2m(Y-mX)x+a^2(Y-mX)^2-a^2b^2=0$

接しているので，

$D/4=a^4m^2(Y-mX)^2-a^2(a^2m^2+b^2)\{(Y-mX)^2-b^2\}=0$

$a^2b^2m^2-b^2(Y-mX)^2+b^4=0$

m について整理すると，$(a^2-X^2)m^2+2XYm+b^2-Y^2=0$

$a^2\neq X^2$ のときは2直線は直交しているから

傾きの積　$\dfrac{b^2-Y^2}{a^2-X^2}=-1$　　$\therefore$　$X^2+Y^2=a^2+b^2$

$a^2=X^2$ のときは $b^2=Y^2$ となり　　$X^2+Y^2=a^2+b^2$

ゆえに，P$(X,\ Y)$ は原点を中心として，半径 $\sqrt{a^2+b^2}$ の円周上の点である。同様にして，だ円に外接する長方形の頂点はすべてこの円周上にあるから，対角線の長さは，円の直径 $2\sqrt{a^2+b^2}$ となり一定である。