第１４回　医学部受験チャレンジ問題解答

問１　(1)　$7x+8y=56$ を満たす負でない整数解は何組あるか。

(2)　$7x+8y=n$ を満たす負でない整数解が 5 組存在するような自然数 n の最小のものを求めよ。

解答 (1)　$7x+8y=56$ …①　を満たす 1 組の解は $(x,\ y)=(8,\ 0)$ である。$7\cdot 8+8\cdot 0=56$ …②

①−② より，$7(x-8)+8y=0$　∴　$7(x-8)=8(-y)$

7 と 8 は互いに素であるから，k を整数として $x-8=8k$ とおくと，$7k=-y$　　∴　$\begin{cases} x=8k+8 \\ y=-7k \end{cases}$

$x,\ y$ は負でない整数なので，$\begin{cases} 8k+8\geqq 0 \\ -7k\geqq 0 \end{cases}$ より　$-1\leqq k\leqq 0$　$\begin{cases} k=0 \text{ のとき，} (x,\ y)=(8,\ 0) \\ k=-1 \text{ のとき，} (x,\ y)=(0,\ 7) \end{cases}$

以上より，負でない整数解は 2 組

(2)　$7x+8y=n$ …③　を満たす 1 組の解は $(x,\ y)=(-n,\ n)$ である。

$7(-n)+8\cdot n=n$ …④　③−④ より，$7(x+n)+8(y-n)=0$　∴　$7(x+n)=8(n-y)$

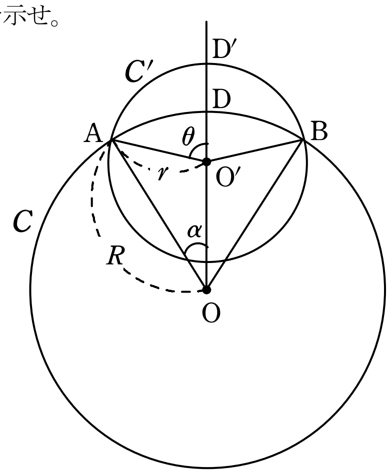
7 と 8 は互いに素であるから，k を整数として $x+n=8k$ とおくと，$7k=n-y$　　∴　$\begin{cases} x=8k-n \\ y=n-7k \end{cases}$

$x,\ y$ は負でない整数であるから，$\begin{cases} 8k-n\geqq 0 \\ n-7k\geqq 0 \end{cases}$　∴　$\dfrac{n}{8}\leqq k\leqq \dfrac{n}{7}$ …⑤

⑤ を満たす整数 k が 5 個あれば，$\dfrac{n}{7}-\dfrac{n}{8}\geqq 4$　∴　$n\geqq 224$　逆に $n=224$ のとき ⑤ は，$28\leqq k\leqq 32$ となり

$k=28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32$ の 5 組存在し適している。したがって，求める n は $n=224$

問２　中心 O，半径 R の球面上に 2 点 A，B がある。球面上の円弧に沿って A から B までゆく最短経路は，A，B を通る大円 (3 点 A，B，O を通る平面と球面との交線) の　劣弧であることを示せ。



解答　球面上で A，B を通る大円を C，A，B を通り中心 O を通らない平面と球面との交線の円を C' とする。直線 AB を軸として，円 C' を円 C と同じ平面まで回転して，その中心を O′，半径を r，$\angle\mathrm{AO'B}=2\theta$，$\angle\mathrm{AOB}=2\alpha$ とする。$\left(\alpha<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$　△AOO′ において正弦定理より

$\dfrac{r}{\sin\alpha}=\dfrac{R}{\sin(\pi-\theta)}$ …①　が成立する。$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ なので，

① の各辺を k とおくと $r=k\sin\alpha$，$R=k\sin\theta$ …②

直線 OO′ と円 C，C' との交点をそれぞれ D，D′ とおく。

② を用いて $\overset{\frown}{\mathrm{AD'B}}-\overset{\frown}{\mathrm{ADB}}=2r\theta-2R\alpha=2k(\theta\sin\alpha-\alpha\sin\theta)=2k\theta\alpha\left(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}-\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)$　$f(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ とおく。

$f'(\theta)=\dfrac{\theta\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}=\dfrac{\cos\theta}{\theta^2}(\theta-\tan\theta)$　ここで，$g(\theta)=\theta-\tan\theta$ とおくと　$g'(\theta)=1-\dfrac{1}{\cos^2\theta}<0$ より，

$g(\theta)$ は減少関数で $g(0)=0$ なので，$0<\alpha<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $g(\theta)<0$　∴　$f'(\theta)<0$ となり，$f(\theta)$ も減少関数である。$\alpha<\theta$ より $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}>\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ となる。ゆえに $\overset{\frown}{\mathrm{AD'B}}>\overset{\frown}{\mathrm{ADB}}$ となり，円 C' が円 C に一致するとき $\theta=\alpha$ となって，A から B までゆく経路は最小となる。以上より，球面上の円弧に沿って A から B までゆく最短経路は，A，B を通る大円の劣弧である。