

第15回 医学部受験チャレンジ問題解答

問1 空間内に2点 $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 2)$ がある。

(1) 線分 PQ を z 軸の回りに回転して出来る立体と2平面 $z=0$, $z=2$ とで囲まれた立体の体積 V_1 を求めよ。

(2) 線分 PQ を y 軸の回りに回転して出来る立体と2平面 $y=0$, $y=1$ とで囲まれた立体の体積 V_2 を求めよ。

解答 (1) z 軸上の点を $A(0, 0, t)$, 線分 PQ 上の点を $B(x, y, t)$ ($0 \leq t \leq 2$) とする。

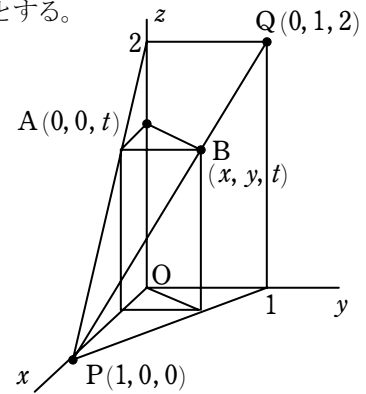
B は PQ を $t : 2-t$ に内分する点であるから, $x = \frac{2-t}{2}$, $y = \frac{t}{2}$ となる。

したがって, $|AB|^2 = \left(\frac{2-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}t^2 - t + 1$ より

求める体積 V_1 は

$$V_1 = \int_0^2 \pi |AB|^2 dt = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{2}t^2 - t + 1\right) dt = \pi \left[\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + t\right]_0^2 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore V_1 = \frac{4}{3}\pi$$



(2) y 軸上の点を $C(0, s, 0)$, 線分 PQ 上の点を $D(x, s, z)$ ($0 \leq s \leq 1$) とする。

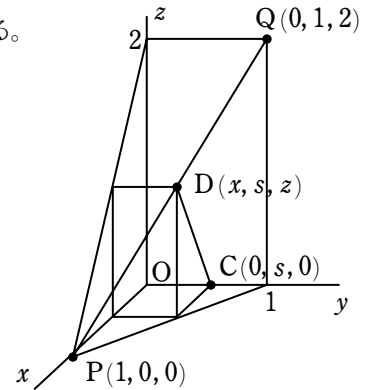
D は PQ を $s : 1-s$ に内分する点であるから, $x = 1-s$, $z = 2s$ である。

$|CD|^2 = (1-s)^2 + (2s)^2 = 5s^2 - 2s + 1$ より

求める体積 V_2 は

$$V_2 = \int_0^1 \pi |CD|^2 ds = \pi \int_0^1 (5s^2 - 2s + 1) ds = \pi \left[\frac{5}{3}s^3 - s^2 + s\right]_0^1 = \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore V_2 = \frac{5}{3}\pi$$

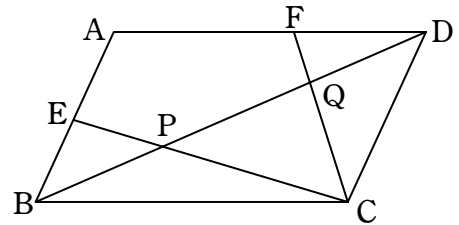


問2 平行四辺形 $ABCD$ の辺 AB , AD 上にそれぞれ点 E , F をとる。

CE , CF と BD との交点を P , Q とする。

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{AF}{FD} = 2 \quad \text{ならば} \quad BP^2 + DQ^2 = PQ^2$$

であることを示せ。



解答 $BP=x$, $PQ=y$, $QD=z$ とおく。

$$\triangle BPE \sim \triangle DPC \text{ より, } \frac{AB}{EB} = \frac{DC}{EB} = \frac{y+z}{x}$$

ゆえに, $\frac{AB}{EB} - 1 = \frac{y+z}{x} - 1$ を作ると

$$\frac{AB-EB}{EB} = \frac{AE}{EB} = \frac{y+z-x}{x} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } \triangle BQC \sim \triangle DQF \text{ より, } \frac{AD}{FD} = \frac{BC}{FD} = \frac{x+y}{z}$$

$$\frac{AD}{FD} - 1 = \frac{x+y}{z} - 1 \text{ を作ると, } \frac{AD-FD}{FD} = \frac{AF}{FD} = \frac{x+y-z}{z} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を条件の式に代入する。} \frac{AE}{EB} \cdot \frac{AF}{FD} = \frac{y+z-x}{x} \cdot \frac{x+y-z}{z} \cdot \frac{y^2 - (x-z)^2}{xz} = 2$$

分母を払って, $y^2 - (x^2 - 2xz + z^2) = 2xz$

$\therefore x^2 + z^2 = y^2$ となり, $BP^2 + DQ^2 = PQ^2$ が成立する。

