第１６回　医学部受験チャレンジ問題解答

問１　(1)　１辺の長さが１の正５角形 ABCDE の対角線 AC の長さを求めよ。

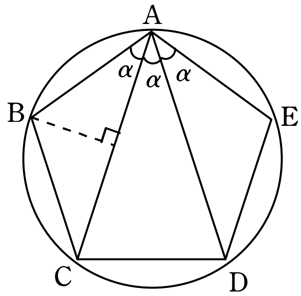
(2)　正 12 面体は 12 個の正５角形で出来ている。１つの頂点には３個の正５角形が集まっているが，隣り合う２つの 正５角形の面のなす角を θ とするとき，$\tan\theta=-2$ であることを示せ。

解答　(1)　正５角形の１内角は $\frac{1}{5}(180^\circ\times5-360^\circ)=108^\circ$ である。

$3\alpha=108^\circ$ とおくと，$\alpha=\angle\mathrm{BAC}=36^\circ$ なので $5\alpha=3\alpha+2\alpha=180^\circ$ より，$\sin3\alpha=\sin(180^\circ-2\alpha)=\sin2\alpha$

ゆえに，$3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin\alpha\fallingdotseq0$ なので，$3-4\sin^2\alpha=2\cos\alpha$



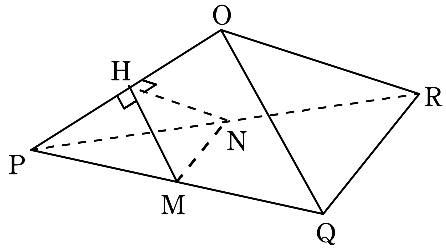
$4\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$ より，$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ $(\cos\alpha>0)$

したがって，$\mathrm{AC}=2\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　$\underline{\mathrm{AC}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(2)　正 12 面体の１つの頂点 O に集まっている３つの正５角形の辺を OP，OQ，OR とする。OP=OQ=OR=1　(1) の結果より，

$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\mathrm{RP}=2\cos\alpha\ \left(=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$　PQ，PR の中点を M，N とし，

M から OP に垂線 MH を引くと $\mathrm{NH}\perp\mathrm{OP}$ となる。



$\mathrm{MH}=\mathrm{PM}\sin\alpha=\sin\alpha\cos\alpha=\mathrm{NH}$ で，$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{QR}=\cos\alpha$

隣り合う２つの正５角形のなす角 θ は，$\theta=\angle\mathrm{MHN}$ である。

ゆえに，$\cos\theta=\frac{\mathrm{MH}^2+\mathrm{NH}^2-\mathrm{MN}^2}{2\mathrm{MH}\cdot\mathrm{NH}}=\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=1-\frac{1}{2\sin^2\alpha}$　ここで，

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$　ゆえに，$\cos\theta=1-\frac{4}{5-\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$　$\cos\theta<0$ なので，

θ は鈍角である。$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=4$　$\tan\theta<0$ より，$\tan\theta=-2$

問２　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ とおく。(n は正の整数)

(1)　I_n と I_{n+2} の関係を求めよ。　(2)　I_7，I_8 の値を求めよ。

解答　(1)　$I_n+I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}$　$\tan x=t$ と

おくと，$dt=\frac{dx}{\cos^2 x}$　ゆえに，$I_n+I_{n+2}=\int_0^1 t^n dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

求める関係は　$\underline{I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}}$

(2)　(1) より $I_{n+2}=\frac{1}{n+1}-I_n$ であるから，$I_7=\frac{1}{6}-I_5=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{4}-I_3\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}-I_1\right)$

ここで，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log2$

$\therefore$　$I_7=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log2=\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\log2$　　$\underline{I_7=\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\log2}$

また，$I_8=\frac{1}{7}-I_6=\frac{1}{7}-\left(\frac{1}{5}-I_4\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{3}-I_2\right)$

ここで，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

$\therefore$　$I_8=\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{76}{105}$　　$\underline{I_8=\frac{\pi}{4}-\frac{76}{105}}$