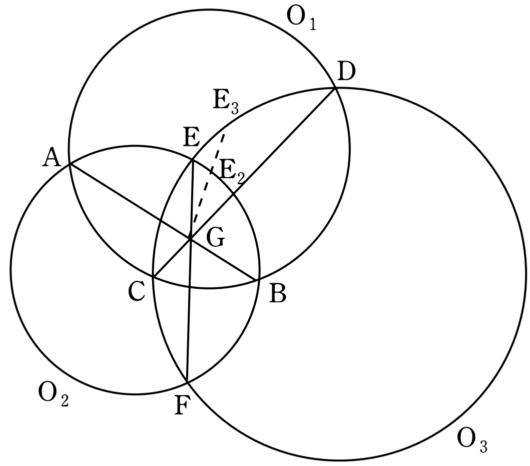
第１８回　医学部受験チャレンジ問題解答

問１　3つの円 O_1，O_2，O_3 がそれぞれ2点 A,B，C,D，E,F で交わっている。このとき，3つの線分 AB，CD，EF は1点で交わることを示せ。



解答　円 O_1，O_2 の交点を A，B，円 O_1，O_3 の交点を C，D，円 O_2，O_3 の交点を E，F とする。

2つの弦 AB，CD の交点を G とし，FG と円 O_2 の交点を E_2，円 O_3 との交点を E_3 とする。

AB，CD は円 O_1 の弦なので，方べきの定理より，

$AG\cdot BG=CG\cdot DG$　……①

AB，FE_2 は円 O_2 の弦なので，

$AG\cdot BG=FG\cdot E_2G$　……②

CD，FE_3 は円 O_3 の弦なので，

$CG\cdot DG=FG\cdot E_3G$　……③

②，③を①に代入すると，$FG\cdot E_2G=FG\cdot E_3G$ が成り立つ。

したがって $E_2G=E_3G$ となり，E_2 と E_3 は一致して E となる。

ゆえに，3つの線分 AB，CD，EF は1点で交わる。

問２　ある池に魚が100匹いる。魚の数 y と時間 t との関係は

$$\frac{dy}{dt}=y-\frac{1}{1000}y^2$$

である。（時間 t の単位は年とする。）

⑴　魚の数が500匹になるのは何年後か。

⑵　この池に生息することが出来る魚の数は何匹までか。

解答

⑴　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y(1000-y)}{1000}$ より，$\displaystyle\int\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1000-y}\right)dy=\int dt$

積分して，$\log\left|\dfrac{y}{1000-y}\right|=t+C$（$C$ は定数）

ゆえに，$\dfrac{y}{1000-y}=\pm e^C e^t$　$t=0$ のとき $y=100$ なので　$\dfrac{1}{9}=\pm e^C$

したがって，$\dfrac{y}{1000-y}=\dfrac{1}{9}e^t$　となる。

$y=500$ のとき，$1=\dfrac{1}{9}e^t$　　$\therefore$　$t=\log 9$

$y=500$ になるのは，$\log 9$ 年後（約2.2年後）

⑵　$9y=(1000-y)e^t$ より y を求めると

$$y=\frac{1000e^t}{e^t+9}=\frac{1000}{1+9e^{-t}}$$

y は t の増加関数で　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}y=\lim_{t\to\infty}\frac{1000}{1+9e^{-t}}=1000$

ゆえに，この池に生息出来る魚は　1000匹までである。