第１９回　医学部受験チャレンジ問題解答

問１　(1)　5 個の約数をもつ自然数はどんな形か。

(2)　100 より小さい自然数で 6 個の約数をもつものをすべて求めよ。

解答　(1)　自然数 N を素因数に分解して，$N=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\cdots\cdots$ (p_1，p_2，$\cdots$ は素数) であれば，
N は $(n_1+1)(n_2+1)\cdots$ 個の約数をもっている。
5 は素数なので約数の素数は 1 種類だけで，$n_1+1=5$　より　$n_1=4$　N は $N=p_1^4$ の形をしている。
すなわち，<u>5 個の約数をもつ自然数は素数の 4 乗である。</u>

(2)　6 個の約数をもつ自然数は次の 2 つの形をしている。

ⅰ)　$N=p_1^{n_1}$　$n_1+1=6$ より $n_1=5$　　$\therefore$　$N=p_1^5$

100 より小さい N は　$N=2^5=32$

ⅱ)　$N=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}$　$(n_1+1)(n_2+1)=6$ より $(n_1,\ n_2)=(1,\ 2)$　　$\therefore$　$N=p_1\cdot p_2^2$

$p_1=2$ のとき，$2\cdot3^2=18$，$2\cdot5^2=50$，$2\cdot7^2=98$　　$p_1=3$ のとき，$3\cdot2^2=12$，$3\cdot5^2=75$

$p_1=5$ のとき，$5\cdot2^2=20$，$5\cdot3^2=45$　　$p_1=7$ のとき，$7\cdot2^2=28$，$7\cdot3^2=63$

$p_1=11$ のとき，$11\cdot2^2=44$，$11\cdot3^2=99$　　$p_1=13$のとき，$13\cdot2^2=52$

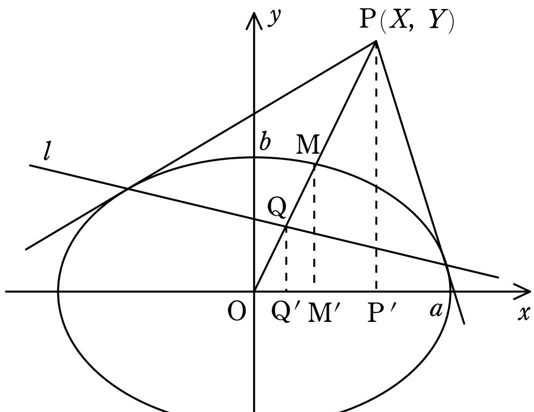
$p_1=17$ のとき，$17\cdot2^2=68$　　$p_1=19$ のとき，$19\cdot2^2=76$　　$p_1=23$ のとき，$23\cdot2^2=92$

ⅰ)，ⅱ) より求める自然数は　<u>12，18，20，28，32，44，45，50，52，63，68，75，76，92，98，99</u>

問２　(1)　だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(0<b<a)$ 外の点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ から，だ円に引いた 2 本の接線の接点を通る直線 l の方程式を求めよ。

(2)　線分 OP とだ円との交点を M，l との交点を Q とするとき，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OM}^2$ であることを示せ。

解答　(1)　だ円上の点 $\mathrm{A}(x,\ y)$ における接線は $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$



これが $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を通るから $\dfrac{x_1X}{a^2}+\dfrac{y_1Y}{b^2}$　$\cdots$①

同様にして，だ円上の点 $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ における接線が $\mathrm{P}(X,\ Y)$ を通るから $\dfrac{x_2X}{a^2}+\dfrac{y_2Y}{b^2}=1$　$\cdots$②　ここで，直線 $\dfrac{Xx}{a^2}+\dfrac{Yy}{b^2}=1$ を考えると，①，② からこの直線は A，B を通る直線である。

ゆえに，<u>l は $\dfrac{Xx}{a^2}+\dfrac{Yy}{b^2}=1$ である。</u>

(2)　$X\neq0$ のとき，OP の方程式は $y=\dfrac{Y}{X}x$ で，l に代入すると

$\dfrac{Xx}{a^2}+\dfrac{Y^2x}{Xb^2}=1$ より　$x=\dfrac{Xa^2b^2}{b^2X^2+a^2Y^2}=\mathrm{OQ}'$

(P，M，Q より x 軸に下した垂線の足を P′，M′，Q′ とする)

だ円の式に代入すると $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{Y^2x^2}{X^2b^2}=1$　$\therefore$　$x^2=\dfrac{X^2a^2b^2}{b^2X^2+a^2Y^2}=\mathrm{OM}'^2$　$\mathrm{OP}'=X$ なので $\mathrm{OP}'\cdot\mathrm{OQ}'=\mathrm{OM}'^2$ が成立する。$\mathrm{PP}'/\!/\mathrm{MM}'/\!/\mathrm{QQ}'$ より $\dfrac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathrm{OQ}'}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathrm{OM}'}{\mathrm{OM}}$ であるから，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OM}^2$ が成立する。

$X=0$ のときは，l の式は $y=\dfrac{b^2}{Y}$ である。

$\therefore$　$\mathrm{OQ}=\dfrac{b^2}{Y}$　$\mathrm{OP}=Y$，$\mathrm{OM}=b$ なので，やはり $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OM}^2$ が成立する。